

Elementarna matematika 2

predavanja

Sveučilište u Zagrebu, PMF-MO

Planimetrija

Osnovne posljedice aksioma planimetrije

Propozicija 6

Neka su $A, B \in M$, $A \neq B$. Postoji jedinstven pravac p takav da je $s_p(A) = B$.

Taj pravac zovemo *simetrala dužine $\overline{AB}$* .

Dokaz.

Dokazat ćemo samo egzistenciju takvog pravca.

Neka je P polovište dužine $\overline{AB}$. Po aksiomu (S_2) postoji barem jedan pravac p takav da je $s_p((PA)) = (PB)$.

Po prethodnom teoremu znamo da je $s_p(P) = P$ te vrijedi

$$d(s_p(A), P) = d(s_p(A), s_p(P)) = d(A, P).$$

Dakle, $s_p(A)$ je točka na polupravcu PB takva da je $d(s_p(A), P) = d(A, P) = d(B, P)$.

Po jedinstvenosti iz (M_4) slijedi da je $B = s_p(A)$.

Propozicija

Neka je p pravac i s_p osna simetrija s obzirom na p . Tada vrijedi

$$T \in p \iff s_p(T) = T.$$

Propozicija 7

Svaka točka na simetrali $\overline{AB}$ jednako je udaljena od A i od B .

Obratno, svaka točka ravnine koja je jednako udaljena od A i od B leži na simetrali $\overline{AB}$.

Osnovne posljedice aksioma planimetrije

Dokaz. $\Rightarrow$ Neka je p simetrala od $\overline{AB}$ te neka je $T \in p$.

$$d(A, T) = d(s_p(A), s_p(T)) = d(B, T).$$

$\Leftarrow$ Neka je $T \in M$ točka takva da je $d(A, T) = d(B, T)$.

Po aksiomu (S_2) postoji pravac q takav da je $s_q((TA)) = (TB)$.

Dakle, $s_q(T) = T$, $s_q(A) \in (TB)$.

$$d(T, s_q(A)) = d(s_q(T), s_q(A)) = d(T, A) = d(T, B).$$

Po jedinstvenosti iz (M_4) slijedi $s_q(A) = B$.

No, sada je $s_p(A) = B = s_q(A)$, pa po jedinstvenosti iz Prop. 6 slijedi da je $p = q$.

Dakle, zbog $T \in q$, slijedi $T \in p$.

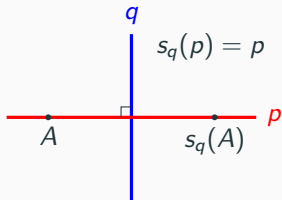


Osnovne posljedice aksioma planimetrije

Definicija

Kažemo da je pravac q **okomit** na pravac p ako je $q \neq p$ i $s_q(p) = p$.

Tada pišemo $q \perp p$.



Propozicija 8

- (a) $q \perp p \implies p \perp q$.
- (b) Okomiti pravci se sijeku.
- (c) Kroz svaku točku $A \in M$ prolazi točno jedan pravac okomit na zadani pravac p .
- (d) Neka je A točka t.d. $A \notin p$ te N nožište okomice iz A na p .
(**Nožište** je presjek pravca iz (c) i pravca p .) Tada za svaku točku $T \in p$ vrijedi $d(A, T) \geq d(A, N)$.

Definicija

Rotacija s centrom O je izometrija ravnine koja je ili identiteta ili ima točno jednu fiksnu točku O .

Centralna simetrija s centrom O je preslikavanje f takvo da za sve točke $T \in M$ vrijedi da je O polovište dužine $\overline{Tf(T)}$.

Uočimo da se u definiciji rotacije ne spominje "kut". Štoviše, još nismo ni uveli taj pojam.

Također, iz definicije centralne simetrije nije odmah jasno da je to izometrija.

Osnovne posljedice aksioma planimetrije

Teorem 9 (O izometrijama ravnine)

- (a) *Svaka izometrija ravnine je bijekcija.*
- (b) $s_p \circ s_p = id$, $s_p^{-1} = s_p$.
- (c) *Izometrija koja ima barem dvije fiksne točke $A \neq B$ je ili identiteta ili s_{AB} .*
- (d) *Kompozicija rotacija s centrom u istoj točki O je ponovno rotacija. Inverz rotacije je rotacija.*
- (e) *Centralna simetrija s centrom O je rotacija s centrom u O .*
- (f) *Svaka izometrija ravnine je kompozicija najviše 3 osne simetrije.*

Dokaz.

- (a) Slijedi iz (b), (f).
- (b) Već imamo rezultat $s_p \circ s_p = id$. Dakle, s_p je bijekcija i $s_p^{-1} = s_p$.
- (c) Lako slijedi iz definicije osne simetrije (S_1) i Prop.5(a).

Osnovne posljedice aksioma planimetrije

(d) Očito iz definicije.

(e) Lako se pokaže (DZ).

(f) Neka je f proizvoljna izometrija.

Ako je $f = id$, neka je p proizvoljan pravac. Tada je $s_p \circ s_p = id = f$.

Ako je $f \neq id$, onda postoji $A \in M$ takva da je $\tilde{A} := f(A) \neq A$.

Neka je a simetrala dužine $\overline{A\tilde{A}}$ i definirajmo $g = s_a \circ f$.

Tada je $g(A) = s_a(f(A)) = s_a(\tilde{A}) = A$.

Ako je $g = id$, onda je $s_a \circ f = id$, pa je $f = s_a^{-1} = s_a$.

Ako je $g \neq id$, onda postoji $B \in M$ takva da je $\tilde{B} := g(B) \neq B$.

Uočimo, $B \neq A$ jer je $g(A) = A$.

Neka je b simetrala dužine $\overline{B\tilde{B}}$.

Vrijedi:

$$d(A, \tilde{B}) = d(g(A), g(B)) = d(A, B),$$

pa je $A \in b$ (po Prop.7).

Osnovne posljedice aksioma planimetrije

Definirajmo $h = s_b \circ g$.

Sada je $h(A) = s_b(g(A)) = s_b(A) = A$, $h(B) = s_b(g(B)) = s_b(\tilde{B}) = B$.

Ako je $h = id$, onda $h = s_b \circ g = s_b \circ s_a \circ f = id$, pa je

$$f = s_a^{-1} \circ s_b^{-1} = s_a \circ s_b.$$

Ako je $h \neq id$, onda postoji $C \in M$ takva da je $\tilde{C} := h(C) \neq C$.

Uočimo, $C \notin AB$ jer su sve točke pravca AB fiksne za h po *Prop.5.(a)*, a točka C nije fiksna.

Također, kao prije:

$$d(A, \tilde{C}) = d(h(A), h(C)) = d(A, C),$$

$$d(B, \tilde{C}) = d(h(B), h(C)) = d(B, C),$$

pa je po *Prop.7* $A, B \in c$, tj. $\overline{AB} \subset c$.

Definirajmo $i := s_c \circ h$. Kao i prije slijedi $i(A) = A$, $i(B) = B$, $i(C) = C$.

Dakle, i ima tri nekolinearna fiksne točke.

Po Prop.5.(b) je $i = id$, pa je $s_c \circ s_b \circ s_a \circ f = id$, tj.

$$f = s_a^{-1} \circ s_b^{-1} \circ s_c^{-1} = s_a \circ s_b \circ s_c.$$



Propozicija

Slika poluravnine po izometriji je opet poluravnina.

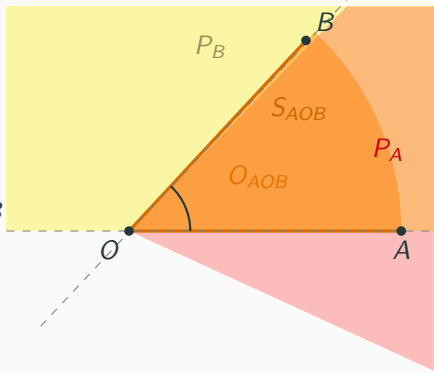
Definicija

Neka su $O, A, B \in M$ takve da je $O \neq A$, $O \neq B$.

Neka je P_B poluravnina određena pravcem OA u kojoj leži točka B . Neka je P_A poluravnina određena pravcem OB u kojoj leži točka A .

Otvoreni kutni isječak O_{AOB} je presjek $P_A \cap P_B$.

Zatvoreni kutni isječak S_{AOB} je unija O_{AOB} i polupravaca (OA) i (OB) .



Definicija

Neka su $((O_1A_1), (O_1B_1))$ i $((O_2A_2), (O_2B_2))$ dva para polupravaca.

Kažemo da su ti parovi kongruentni ako postoji izometrija $f : M \rightarrow M$ takva da je

$$f((O_1A_1)) = (O_2A_2), \quad f((O_1B_1)) = (O_2B_2).$$

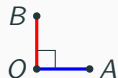
Uočimo, "biti kongruentan" je relacija ekvivalencije.

Definicija

Klase ekvivalencije relacije "biti kongruentan" zovemo **neorijentirani kutovi**. Klasu koja sadrži par $((OA), (OB))$ označavamo s $\angle AOB$.

Primjeri:

- $(OA) = (OB) \implies \angle AOB$ je
nul-kut
- $(OA) \cup (OB)$ je pravac $\implies \angle AOB$
je ispruženi kut
- $OA \perp OB \implies \angle AOB$ je pravi kut



Uočimo: definicija neorijentiranog kuta podrazumijeva samo ono što inače zovemo "kutovi manji od 180, tj. još nemamo izbočene kutove.

Također, parovi $((OA), (OB))$ i $((OB), (OA))$ su kongruentni. Zato je $\angle AOB = \angle BOA$. ($\implies$ neorijentirani)

Definicija

Na skupu $\mathcal{K}$ svih neorijentiranih kutova definiramo uređaj:

za $\alpha = \angle AOB, \beta = \angle AOC$ definiramo $\alpha \leq \beta \iff S_{AOB} \subseteq S_{AOC}$.

Uočimo, uređaj definiramo na klasama ekvivalencije. Da bismo mogli usporediti dvije klase, moraju imati reprezentante kojima je jedan od polupravaca (OA) zajednički. No, to se uvijek može napraviti (*Prop.10*).

Propozicija 10

Relacija $\leq$ je relacija totalnog uređaja na skupu svih neorijentiranih kutova.

Definicija

Kut γ je **zbroj kutova** α i β i pišemo $\gamma = \alpha + \beta$ ako postoje polupravci $(OX), (OY), (OZ)$ takvi da je $\alpha = \angle XOY$, $\beta = \angle YOZ$, $\gamma = \angle XOZ$ i $S_{XOZ} = S_{XOY} \cup S_{YOZ}$.

Pišemo i $\alpha = \gamma - \beta$, $\beta = \gamma - \alpha$.

Ako je $\alpha + \beta$ ispružen kut, kažemo da je β **suplement** od α .

Definicija

Mjera neorijentiranih kutova je strogo rastuća funkcija $\varphi : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^+$ takva da je $\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$, za sve α, β za koje je definirana suma.

Uočimo, nije uvijek definirana suma $\alpha + \beta$ (ovisi je li zbroj manji od ispruženog kuta).

Teorem 11

Za svaki realan broj $s > 0$ postoji jedinstvena mjera $\varphi : \mathcal{K} \rightarrow [0, s]$ takva da je $\varphi(\text{ispruženi kut}) = s$ i da je φ bijekcija.

Skica dokaza.

Po aksiomu (S_2), za svaki kut $\angle XOY$ postoji pravac $z = OZ$ takav da je $s_z(OX) = (OY)$. Tj. postoji izometrija s_z takva da je $s_z((OX)) = (OY)$ i $s_z((OZ)) = (OZ)$.

Dakle, $\angle XOZ$ i $\angle YOZ$ su kongruentni i $\angle XOZ = \angle YOZ$.

Sada se lako vidi da je $S_{XOY} = S_{XOZ} \cup S_{ZOY}$, tj.

$$\varphi(\angle XOY) = \varphi(\angle XOZ) + \varphi(\angle YOZ) = 2\varphi(\angle XOZ).$$

Sada, ako krenemo od ispruženog kuta ω , možemo uzastopnim raspolavljanjem za svaki $n \in \mathbb{N}$ dobiti kut α takav da je

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{2^n} \varphi(\omega) = \frac{1}{2^n} s.$$

Zatim "slaganjem kopija" kuta α možemo za svaki $k \in \mathbf{N}$ dobiti kut β takav da je $\varphi(\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\alpha) + \cdots \varphi(\alpha) = \frac{k}{2^n} s$.

Neka je γ proizvoljan kut u ravnini.

Neka je $n \in \mathbf{N}$ te neka smo ispruženi kut podijelili na n dijelova.

Slaganjem kopija kuta α možemo dobiti

$$\underbrace{S_{\alpha + \alpha + \cdots + \alpha}}_{k_n} \subseteq S_{\gamma} \subset \underbrace{S_{\alpha + \alpha + \cdots + \alpha}}_{k_{n+1}},$$

gdje k_n ovisi o n tj. koliko puta smo raspolavljali ω .

Dakle, dobijemo:

$$\frac{k_n}{2^n} s \leq \varphi(\gamma) < \frac{k_{n+1}}{2^n} s.$$

Na ovaj način definirali smo nizove brojeva $(d_n)_n$ i $(g_n)_n$ takve da je $d_n \leq \varphi(\gamma) < g_n$.

Lako vidimo da postoje limesi $\lim_n d_n$ i $\lim_n g_n$ te se podudaraju, pa po teoremu o sendviču dobivamo jednoznačno određen $\varphi(\gamma)$.

Ponekad se za s uzima $s = 180$, to zovemo **mjera kuta u stupnjevima**. U ovom slučaju, ispruženi kut je mjere 180.

Mi ćemo najčešće koristiti $s = \pi$, **mjeru kuta u radijanima**. Ovdje je ispruženi kut mjere π .

Kut s mjerom između 0 i $\frac{\pi}{2}$ zovemo **šiljasti kut**, a kut s mjerom između $\frac{\pi}{2}$ i π **tupi kut**.

Dogovorno, definiramo i **izbočene kutove**: za $\alpha = \angle XOY$, pripadni izbočeni kut je $M \setminus S_{XOY} \cup (SX) \cup (SY)$. Njegovu mjeru definiramo kao $360 - \alpha$ ili $2\pi - \alpha$.

Definicija

$\triangle ABC$ ima *unutrašnje kutove* $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle ACB$.

Vanjski kutovi pri vrhu A su $\angle BA\tilde{C}$ i $\angle \tilde{B}AC$, gdje je $\tilde{C} \in AC \setminus (AC)$, $\tilde{B} \in AB \setminus (AB)$.

Analogno za vrhove B i C .

Uočimo da je $\angle BA\tilde{C} = \angle \tilde{B}AC$ jer za traženu izometriju možemo uzeti centralnu simetriju s centrom u A .

Propozicija 12 ("Pons asinorum" = "magareći most")

Za svaki $\triangle ABC$ vrijedi $|\overline{AB}| = |\overline{AC}| \iff \gamma = \beta$.

Dokaz. $\implies$ Po Prop.7, točka A leži na simetrali stranice $\overline{BC}$, tj. postoji pravac p takav da je

$$s_p(A) = A, s_p(B) = C, s_p(C) = B.$$

Po Teoremu4. ta izometrija preslikava polupravac (BA) u (CA) te polupravac (BC) u (CB) . Dakle, $\angle ABC$ i $\angle ACB$ su kongruentni.

$\impliedby$ Neka je p simetrala stranice $\overline{BC}$ te $\tilde{A} = s_p(A)$.

Tada $s_p((AC)) = (\tilde{A}B)$ i $s_p((CB)) = (BC)$, pa je $\angle ACB = \angle \tilde{A}BC$.

Zbog $\angle ACB = \angle ABC$ slijedi $\angle ABC = \angle \tilde{A}BC$.

Uočimo da se A i $\tilde{A} = s_p(A)$ nalaze u istoj poluravnini omeđenoj pravcem BC jer je $s_p(BC) = CB = BC$ i izometrija s_p čuva poluravnine.

Sada je $\angle ABC = \angle \tilde{A}BC$ te im je krak (BC) zajednički.

Slijedi da je $(AB) = (\tilde{A}B)$ (Raspisati za DZ).

Analogno, $(AC) = (\tilde{A}C)$.

Konačno,

$$\{A\} = (AC) \cap (AB) = (\tilde{A}C) \cap (\tilde{A}B) = \{\tilde{A}\} = s_p(A).$$

Slijedi da je $A \in p$, pa je $d(A, B) = d(A, C)$ po *Prop.7*.



Propozicija 13

- (a) *U svakom trokutu nasuprot veće stranice leži veći kut i obratno ($|\overline{AB}| \geq |\overline{AC}| \iff \gamma \geq \beta$.)*
- (b) *U svakom trokutu je zbroj duljina dvije stranice veći od duljine treće stranice.*
- (c) *Vanjski kut trokuta uz vrh A veći je od unutarnjih uz vrhove B i C.*

Dokaz.

- (a) Slijedi iz (c) i Prop.12.
- (b) Slijedi iz (M_3).

(c) Neka je $\tilde{B} \in AB \setminus (AB)$ te $\tilde{\alpha} = \angle CAB$ vanjski kut uz vrh A .

Pokažimo da je $\tilde{\alpha} > \gamma$.

Neka je P polovište stranice $\overline{AC}$ te neka je c_P centralna simetrija s centrom u P .

Označimo $X = c_P(B)$. Po definiciji je $c_P(A) = C$.

c_P je izometrija, pa je $c_P((AC)) = (CA)$, $c_P((AX)) = (BC)$, tj.

$\angle ACB = \angle CAX = \gamma$.

Uočimo, B i X se nalaze u različitim poluravninama određenim s AC ($\overline{BX} \cap AC = \{P\} \neq \emptyset$).

Također, može se pokazati da je X u istoj poluravnini određenoj s AB kao i točka C (uputa: $c_P(AB) = CX$, DZ).

Slijedi da je $X \in S_{\tilde{B}AC}$, $X \notin (A\tilde{B})$, $X \notin (AC)$.

Dakle, $\angle CAX < \angle CAB$, tj. $\gamma < \tilde{\alpha}$.

Analogno se pokaže za kut β .

